

El Formalismo Multifractal Microcanónico: Un nuevo paradigma para el tratamiento de datos en turbulencia

Antonio Turiel[†], Oriol Pont[‡] y Conrad Pérez-Vicente[‡]

[†]*Institut de Ciències del Mar, CSIC*

Passeig Marítim de la Barceloneta, 37-49. 08003 Barcelona

[‡]*Departament de Física Fonamental, Universitat de Barcelona*

Diagonal, 647. 08028 Barcelona

Desde Kolmogorov¹, la turbulencia completamente desarrollada (números de Reynolds Re muy elevados) y sistemas afines (lo cual comprende un amplio rango de sistemas físicos, desde las imágenes del mundo real² a las series econométricas³ pasando por el ritmo cardíaco⁴ o la distribución de fitoplancton en el mar⁵) se han caracterizado por medio de variables estadísticas de carácter global. Se procede así ya que cuando $Re \gg 1$, a cualquier escala el número de grados de libertad no resueltos es infinito, así que estudiar una localización concreta pierde sentido físico; por ergodicidad, al desarrollar en escala cualquier posición resultará cualquier configuración del fluido. De este modo, en estas teorías clásicas solamente se tiene en cuenta las distribuciones de magnitudes que describan las propiedades globales del sistema, por tanto, su caracterización es puramente estadística. Dicha caracterización viene dada por las llamadas funciones de estructura, que son los momentos de la distribución de una determinada variable ajustable en escala, ϵ_r . Esta variable puede definirse de diversos modos, según el contexto; puede ser el incremento longitudinal de la velocidad del fluido entre dos puntos separados una distancia r , la proyección en wavelet de escala r de un escalar, la integral sobre una bola de radio r de la disipación puntual de energía, etc. Lo importante es que con la definición escogida la variable ponga de manifiesto la presencia de autosimilitud, esto es:

$$\langle \epsilon_r^p \rangle = \alpha_p r^{\tau_p} + o(r^{\tau_p})$$

Los exponentes τ_p en general presentan escalado anómalo, esto es, no dependen linealmente de p , lo cual es consecuencia de la presencia de una estructura multifractal subyacente⁶, caracterizada por el espectro de singularidades $D(h)$ (o $f(\alpha)$ según la notación de algunos autores). Cada una de las componentes fractales que forman esta estructura multifractal están unívocamente asociadas a un exponente h y tienen dimensión $D(h)$. El espectro de singularidades $D(h)$ se calcula a partir de los exponentes τ_p , es decir, por medio de estadísticos derivados de promedios globales. Por ello, a esta aproximación se le llama Formalismo Multifractal Canónico (FMC), y ha dominado la caracterización de los fluidos turbulentos y los sistemas caóticos durante los últimos sesenta años.

En los últimos años se ha introducido una alternativa de mayor contenido geométrico, el Formalismo Multifractal Microcanónico (FMM)^{7,8}. Según el FMM, tiene sentido preguntarse acerca de los exponentes de singularidad o exponentes de escala de la variable ϵ_r . Así, para cada punto \mathbf{x} del sistema y bajo las condiciones apropiadas:

$$\epsilon_r(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})r^{h(\mathbf{x})} + o(r^{h(\mathbf{x})})$$

esto es, pasamos de la descripción global del FMC a una descripción local en la que los exponentes de singularidad

h adquieren significado geométrico y son identificables localmente, en todo punto. La distribución de exponentes de singularidad a una escala dada r , denotada por $\rho_r(h)$, no puede tener cualquier forma por compatibilidad con el FMC, y de hecho $\rho_r(h) \sim r^{d-D(h)}$. El uso del FMM permite calcular características globales como $D(h)$ con menos estadística, pero no sólo eso sino que además proporciona el campo $h(\mathbf{x})$ para todos los puntos \mathbf{x} , lo cual nos muestra la geometría del sistema y posibilita un sinnúmero de aplicaciones. Por ejemplo en oceanografía, se ha comprobado que los exponentes de singularidad extraídos de imágenes de satélite de temperatura superficial del mar trazan las líneas de corriente. Las aplicaciones emergentes del uso del FMM están lejos de estar agotadas: compresión de imagen, predicción en series temporales, inferencia de datos perdidos, estimación de velocidad en fluidos, filtración de ruido, etc, son varios ejemplos

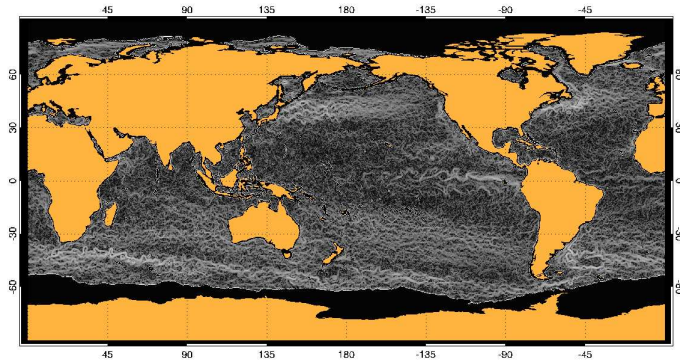


Figura 1. Exponentes de singularidad $h(\mathbf{x})$ obtenidos de un mapa global de temperatura de superficie del mar. Los exponentes más singulares (más brillantes en la figura) trazan las líneas de corriente principales.

* turiel@icm.csic.es, opont@ub.edu, conrad@ffn.ub.es

¹ A.Ñ. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **309**, 301 (1941).

² A. Turiel et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1098 (1998).

³ B. Mandelbrot, A. Fisher, and L. Calvet, *Cowles Foundation Discussion Paper No. 1164* (1997).

⁴ P. Ivanov et al., *Nature* **399**, 461 (1999).

⁵ L. Seuront et al., *J. Plank. Res.* **21**, 877 (1999).

⁶ G. Parisi and U. Frisch, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics. Proc. Intl. School of Physics E. Fermi*, (1985), pp. 84–87.

⁷ A. Chhabra et al., *Phys. Rev. A* **40**, 5284 (1989).

⁸ A. Turiel, H. Yahia, and C. Pérez-Vicente, accepted in *J. Phys. A* (2007)