

Vectores de Lyapunov en sistemas con caos espacio-temporal

Diego Pazó, Ivan G. Szendro, Miguel A. Rodríguez y Juan M. López
Instituto de Física de Cantabria (IFCA)
CSIC-Universidad de Cantabria
 39005 Santander

El caos es usualmente cuantificado por medio de los exponentes de Lyapunov (ELs) que miden separación exponencial de trayectorias cercanas¹. En los sistemas extendidos en el espacio es habitual observar caos espacio-temporal (CET) que se distingue por una aleatoriedad aparente en el tiempo y en el espacio. Es interesante observar que los sistemas con CET son extensivos en el sentido de que los espectros de Lyapunov convergen a una densidad cuando el tamaño del sistema aumenta.

No existe una definición única de vector de Lyapunov (VL), es habitual referirse con ese nombre a los vectores que aparecen al calcular los ELs por medio del algoritmo de Bennetin *et al.* que usa sucesivas ortonormalizaciones de Gram-Schmidt. Estos VLs son conocidos como vectores *backward* pues sólo se comportan “bien” (es decir creciendo/mengando con la tasa exponencial de su EL asociado) en el límite $t \rightarrow -\infty$. Otro tipo de VL es el llamado característico (o covariante), que aun siendo más difícil de hallar, se comporta “bien” en los dos límites temporales, pasado y futuro. Como hemos demostrado recientemente², los VLs característicos tienen un significado físico mucho más claro que los VLs *backward*. Los primeros tienen una dinámica mapeable a una superficie rugosa por medio de la transformación de Hopf-Cole, que consiste en tomar el logaritmo del valor absoluto del VL. Los resultados aquí descritos se refieren a los VLs una vez realizada la transformación de Hopf-Cole que los transforma en una “superficie” asociada.

En esta contribución demostramos que los VLs característicos presentan una universalidad cuantitativa y cualitativa [dentro de la familia de sistemas³ con caos espacio-temporal cuyo primer vector de Lyapunov (bajo la transformación de Hopf-Cole) pertenece a la clase de universalidad de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)].

Mostramos aquí los resultados⁴ para tres sistemas:

1. Un retículo de mapas caóticos acoplados:

$$u_i(t+1) = \epsilon f(u_{i+1}(t)) + \epsilon f(u_{i-1}(t)) + (1-2\epsilon)f(u_i(t)), \quad (1)$$

donde $\epsilon = 0.2$ y la función f es el mapa de la tienda asimétrico $f(x \leq 1/a) = ax$; $f(x > 1/a) = a(x-1)/(1-a)$ con $a = 2.3$.

2. El modelo Lorenz'96 (un modelo de juguete para estudios del clima):

$$\dot{x}_i = -x_i - x_{i-1}(x_{i-2} - x_{i+1}) + F \quad (2)$$

con $F = 8$.

3. Una ecuación estocástica multiplicativa (propuesta³ anteriormente como modelo para la dinámica del primer vector de Lyapunov):

$$\partial_t w = \zeta w + \partial_{xx} w \quad (3)$$

donde $\zeta(x, t)$ es un término fluctuante que imita una señal caótica y que asumimos toma la forma de ruido blanco: $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = 2 \delta(x - x') \delta(t - t')$.

En todos los casos, para los ELs más grandes, el factor de estructura $S_n(k)$ del VL correspondiente al n -ésimo EL escala como $\sim k^{-2}$ sólo hasta una cierta escala (de hecho es KPZ “a trozos”). A partir de ahí se tiene $S_n(k) \sim k^{-\gamma}$ con un γ diferente según se consideren VLs *backward* o característicos.

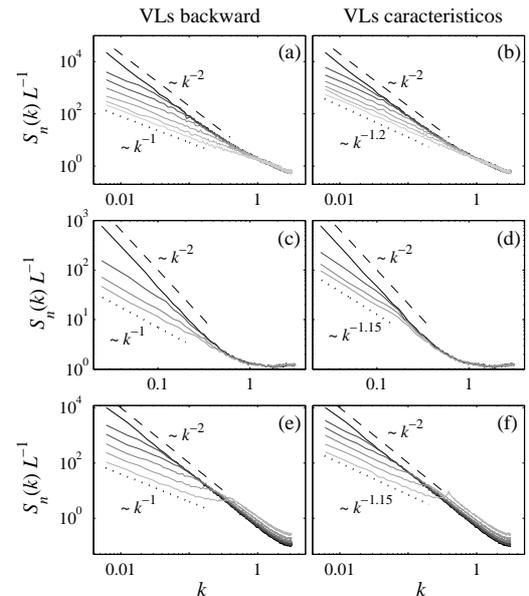


Figura 1. Factores de estructura de los VLs para los tres modelos considerados: (a,b) retículo de mapas acoplados (1) con tamaño $L = 1024$, de arriba abajo los VLs con $n = 1, 4, 8, 16, 32, 64, 128$; (c,d) modelo Lorenz'96 (2) con $L = 256$, $n = 1, 4, 8, 12$; y (e,f) ecuación estocástica (3) con $L = 1024$, $n = 1, 4, 8, 16, 32, 64$.

¹ J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).

² I. G. Szendro, D. Pazó, M. A. Rodríguez, and J. M. López, *Phys. Rev. E* **76**, 025202 (2007).

³ A. Pikovsky and A. Politi, *Nonlinearity* **11**, 1049 (1998).

⁴ D. Pazó *et al.* (en preparación).