

Un modelo analítico sencillo para las propiedades reológicas de un gas granular en el régimen no estacionario del flujo tangencial uniforme

Antonio Astillero* y Andrés Santos^{†,‡}

Departamento de Tecnología de los Computadores y de las Comunicaciones,
Universidad de Extremadura, 06800 Mérida (Badajoz)

Un gas granular nunca se encuentra en equilibrio pues existe una continua disipación de energía debido a la inelasticidad de las colisiones entre las partículas. Como consecuencia, no está clara la posibilidad de aplicar una descripción de tipo hidrodinámico a esta clase de sistemas físicos¹. Tal descripción, de ser posible, no debe limitarse a las ecuaciones de Navier–Stokes, sino que debe abarcar aquellos estados en los que la dependencia espacial y temporal de la función de distribución de velocidades $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ tiene lugar a través de una dependencia funcional respecto a los campos hidrodinámicos $n(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ y $T(\mathbf{r}, t)$, es decir, $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f[\mathbf{v}|n, \mathbf{u}, T]$. Desde este punto de vista, dado cualquier estado inicial, la evolución tendría lugar en dos etapas sucesivas. El gas experimentaría en primer lugar una etapa *cinética* corta (de unas pocas colisiones por partícula) y muy sensible a las condiciones iniciales, seguida de una etapa *hidrodinámica* más lenta en la que el gas prácticamente ha “olvidado” las condiciones iniciales, alcanzándose por último un estado estacionario de no equilibrio en el caso de que externamente se inyecte energía que compense la disipación inelástica debida a las colisiones. El objetivo de este trabajo es analizar el mencionado régimen hidrodinámico desde un punto de vista analítico en el caso del flujo tangencial uniforme (“uniform shear flow”, USF).

En el USF la conservación del momento lineal tiene como consecuencia que la tensión tangencial P_{xy} sea uniforme. La ecuación de balance de la energía está dada por

$$\partial_t T(t) = -(2a/3n)P_{xy}(t) - \zeta(t)T(t), \quad (1)$$

donde a es el gradiente de velocidad impuesto y $\zeta(t)$ es la tasa de enfriamiento debida a la inelasticidad. Nuestro modelo reológico consta de dos pasos. En primer lugar, se reemplaza el operador de colisión de la ecuación de Boltzmann por un término de relajación temporal hacia la distribución de equilibrio local más un término de fuerza de fricción que imita los efectos de enfriamiento debidos al carácter inelástico de las colisiones. Aplicado al USF, este modelo cinético cierra la ecuación (1) con las ecuaciones de evolución siguientes:

$$\partial_t P_{xy}(t) = -aP_{yy}(t) - \beta\nu(t)P_{xy}(t) - \zeta(t)P_{xy}(t), \quad (2)$$

$$\partial_t P_{yy}(t) = -\beta\nu(t)[P_{yy}(t) - nT(t)] - \zeta(t)P_{yy}(t), \quad (3)$$

donde $\nu \propto nT^{1/2}$ es una frecuencia de colisión efectiva escogida de modo que $\zeta^* \equiv \zeta/\nu = \frac{5}{12}(1 - \alpha^2)$, siendo α el

coeficiente de restitución, y $\beta = \frac{1}{2}(1 + \alpha)$. En principio, el sistema de ecuaciones acopladas (1)–(3) debe resolverse numéricamente, en cuyo caso la solución incluye tanto el régimen transitorio cinético como la etapa de evolución hidrodinámica, sin una separación totalmente nítida entre ambas etapas. Al objeto de extraer la solución hidrodinámica de un modo analítico, introducimos una aproximación adicional en el segundo paso. El método empleado consiste en generalizar las ecuaciones (1)–(3) al caso $\nu(T) \propto T^q$, llevar a cabo un desarrollo perturbativo lineal alrededor de $q = 0$, construir un aproximante de Padé y tomar $q = \frac{1}{2}$ al final de los cálculos. Este modelo proporciona los siguientes resultados explícitos para las dos principales magnitudes reológicas:

$$\eta^*(a^*) = \beta^{-1} [1 + 2F(a^*)]^{-2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} [\zeta^*/\beta - 2F(a^*)] \times [1 - 6F(a^*)] / [1 + 6F(a^*)]^2 \right\}^{-1}, \quad (4)$$

$$\Psi^*(a^*) = 2\beta^{-2} [1 + 2F(a^*)]^{-3} \left\{ 1 + \frac{\zeta^*/\beta - 2F(a^*)}{2[1 + 6F(a^*)]^2} \right\}^{-1} \times \left\{ 1 + \frac{\zeta^*/\beta - 2F(a^*)}{[1 + 6F(a^*)]^2} \right\}^{-1}, \quad (5)$$

donde $a^* = a/\nu$ es el gradiente de velocidad reducido, $\eta^* = -(P_{xy}/nT)/a^*$ es la viscosidad tangencial reducida no lineal y $\Psi^* = [(P_{xx} - P_{yy})/nT]/a^{*2}$ es la primera función viscométrica reducida. En las ecuaciones (4) y (5), $F(a^*) \equiv \frac{2}{3} \sinh^2 \left[\frac{1}{6} \cosh^{-1}(1 + 9a^{*2}/\beta^2) \right]$.

Hemos comprobado que, para $\alpha \geq 0.5$, las ecuaciones (4) y (5) proporcionan valores prácticamente indistinguibles tanto de los obtenidos mediante una solución numérica de las ecuaciones (1)–(3) como de los obtenidos por medio de la resolución de la ecuación de Boltzmann utilizando el método de simulación directa de Monte Carlo (DSMC)².

* aavivas@unex.es

http://www.unex.es/fisteor/antonio_astillero/

[†] Departamento de Física, Universidad de Extremadura, 06071 Badajoz

[‡] andres@unex.es

<http://www.unex.es/fisteor/andres/>

¹ L. Kadanoff, Rev. Mod. Phys. **71**, 435 (1999).

² A. Astillero and A. Santos, Europhys. Lett. **78**, 24002 (2007).