Intermitencia, Sucesos Raros y Dinámica Invariante de Escala de las Perturbaciones en Sistemas Caóticos con Retraso Temporal

Alejandro D. Sánchez, Juan M. López*, Miguel A. Rodríguez
Instituto de Física de Cantabria (CSIC-UC), E-39005 Santander, Spain[1]

Manuel A. Matías
Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados IMEDEA (CSIC-UIB), E-07071 Palma de Mallorca, Spain

El caos determinista es un fenómeno muy común en sistemas no-lineales y muy estudiado en el caso de baja dimensión. Los exponentes de Lyapunov, que miden la separación de trayectorias inicialmente muy cercanas, han demostrado ser una herramienta muy útil para caracterizar el movimiento caótico en sistemas de unos pocos grados de libertad. En el caso de sistemas extendidos en el espacio con dinámica caótica es también posible generalizar de manera directa la definición de exponentes de Lyapunov para llegar al concepto de densidad o espectro de exponentes de Lyapunov. Sin embargo, existen dificultades inherentes a los sistemas extendidos espacialmente, como fenómenos de propagación o difusión, que complican mucho el problema y han llevado a la introducción de conceptos nuevos como el exponente de Lyapunov co-movil o convectivo.

Pikovsky *et. al.*[2,3] han encontrado recientemente que existe una conexión muy interesante entre la dinámica del vector de Lyapunov y la ecuación de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)[4]. La ecuación que gobierna la dinámica de una perturbación lineal en sistemas extendidos espacialmente puede representarse como la popular ecuación de KPZ que se usa en el contexto de crecimiento de superficies fuera de equilibrio. Estos autores han demostrado que esta equivalencia se cumple, entre otros, en redes de osciladores caóticos acoplados.

Una cuestión muy interesante que surge de manera natural a la luz de estos resultados es hasta que punto sería posible dividir la dinámica de sistemas con caos espacio-temporal en *clases de universalidad* similares a las que existen en procesos de crecimiento de superficies.

En este trabajo estudiamos sistemas dinámicos con retraso (*Delayed Dynamical Systems* (DDS)), que formalmente son sistemas infinito dimensionales que poseen muchas de las propiedades de sistemas con caos espaciotemporal. Los DDS se usan en numerosas aplicaciones en biología (como la regulación de la producción de células sangíneas)[5] y física (como la dinámica de láseres con retroalimentación óptica)[6,7]. Aparte de su interés académico, en los últimos años ha habido un interés notable en DDS por su potencial utilidad en sistemas de comunicación segura mediante laseres de semiconductor.

En general, un sistema dinámico con retraso τ viene descrito por una ecuación del tipo:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = F\,(y, y_\tau), \qquad (1)$$

donde $y(t)$ es la variable dinámica y y_τ es la variable retrasada en tiempo $t-\tau$. Nuestro propósito en este trabajo es demostrar que, después de algunas transformaciones simples, la dinámica del vector de Lyapunov en sistemas retrasados puede representarse de manera genérica en la ecuación de Zhang[8] que describe el crecimiento de superficies controladas por ruidos con distribución de ley de potencias:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = D\nabla^2 h + f_0 + \eta(x,\theta), \qquad (2)$$

donde $h(x,\theta) = \log|\phi(x,\theta)|$ es la altura de la superficie y ϕ la amplitud de la perturbación (vector de Lyapunov). El ruido resulta tener una distribución $P(\eta) \sim \eta^{-(1+\mu)}$ en forma de ley de potencias. La consecuencia inmediata y más visual de este resultado es que en la representación como superficie, las fluctuaciones muestran intermitencia (no Gaussianidad) y propiedades de multiscaling de las funciones de correlación. Demostramos que la aparición de un ruido en ley de potencias es inherente a los DDS y está directamente relacionado con las falta de simetría temporal en estos sistemas. El valor del parámetro μ queda fijado por la forma de la función no-lineal en Eq.(1).

De manera que los DDS representan una clase de universalidad de caos espaciotemporal diferente a los mapas acoplados y otros sistemas que pertenecen a la clase de KPZ. Demostramos que el caos espaciotemporal de los sistemas retrasados es de manera clara distinto en su naturaleza del que se encuentra en otros sistemas y esto se hace patente en que la dinámica de las perturbaciones (vectores de Lyapunov) pertenece a una clase de universalidad diferente.

Los resultados teóricos se han comparado con simulaciones de tres modelos clásicos de sistemas retrasados: Mackey-Glass, Ikeda y Ikeda (con $\sin^2$).

---

* lopez@ifca.unican.es
1 `http://www.ifca.unican.es/~fises`
2 A. Pikovsky and J. Kurths, Phys. Rev. E **49**, 898 (1994).
3 A.S. Pikovsky and A. Politi, Nonlinearity **11**, 1049 (1998).
4 M. Kardar, G. Parisi, and Y.C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).
5 M. C. Mackey and L. Glass, Science **197**, 287 (1977).
6 G.D. van Wiggeren and R. Roy, Science **279**, 1198 (1998).
7 V.S. Udaltsov, J.P. Goedgebuer, L. Larger, and W.T. Rhodes, Phys. Rev. Lett. **86**, 1892 (2001).
8 Y-C. Zhang, J. Phys. France **51**, 2129 (1990).